Μια Πρώτη επαφή με τους Αυτομορφισμούς

Ορισμος: Εαν $\varphi: G \to G$ ισομορφισμός ομαδων τοτε η φ καλειται αυτομορφισμός.

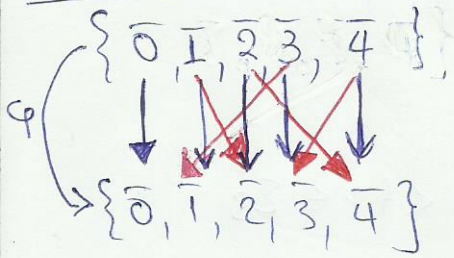
Το συνολο των αυτομορφισμων συμβολιζεται με $Aut(G)$. Το συνολο $Aut(G)$ με τη συνθεση αποτελει μία ομάδα.

Παράδειγμα 1.

Εστω $\mathbb{Z}_5^{\oplus} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ και $\varphi: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ ένας αυτομορφισμος.

$\mathbb{Z}_5 = \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{4} \rangle$

ΣΧΗΜΑ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΑΥΤΟΜΟΡΦΙΣΜΟΥ



Αφου φ ισομορφισμος τοτε $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$.

① Θεωρώ $\varphi(\bar{1}) = \bar{1}$.

Τοτε, $\varphi(\bar{2}) = \varphi(\bar{1} \oplus \bar{1}) \overset{\text{ομομ.}}{=} \varphi(\bar{1}) \oplus \varphi(\bar{1}) = \bar{2}$

Επίσης, $\varphi(\bar{3}) = \varphi(\bar{2} \oplus \bar{1}) \overset{\text{ομομ.}}{=} \varphi(\bar{2}) \oplus \varphi(\bar{1}) = \bar{2} + \bar{1} = \bar{3}$

και $\varphi(\bar{4}) = \varphi(\bar{2} \oplus \bar{2}) \overset{\text{ομομ.}}{=} \varphi(\bar{2}) \oplus \varphi(\bar{2}) = \bar{2} + \bar{2} = \bar{4}$

② Θεωρω $\varphi(\bar{1}) = \bar{2}$.

Τότε, $\varphi(\bar{2}) = \varphi(\bar{1} \oplus \bar{1}) \overset{\text{ομομ}}{=} \varphi(\bar{1}) \oplus \varphi(\bar{1}) = \bar{4}$

$\varphi(\bar{3}) = \varphi(\bar{2} \oplus \bar{1}) \overset{\text{ομομ}}{=} \varphi(\bar{2}) \oplus \varphi(\bar{1}) = \bar{4} \oplus \bar{2} \equiv \bar{1}$

$\varphi(\bar{4}) = \varphi(\bar{2} \oplus \bar{2}) \overset{\text{ομομ}}{=} \varphi(\bar{2}) \oplus \varphi(\bar{2}) = \bar{4} \oplus \bar{4} \equiv \bar{3}$

Με τον ίδιο τρόπο μπορουμε να βρουμε άλλες δύο (δυνατές) απεικονίσεις $\varphi: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$.

Άρα, παρατηρούμε ότι το σύνολο $Aut(\mathbb{Z}_5)$ θα αποτελείται από αυτές τις 4 απεικονίσεις που βρήκαμε προηγουμένως.

Δηλαδή, $|Aut(\mathbb{Z}_5)| = 5-1 = 4$.

Αυτό το παράδειγμα μας βοηθάει να συμπεράνουμε αντίστοιχα πράγματα για τον αυτομορφισμό

$\varphi : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p$. δηλ. $Aut(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_{p-1}$

με $|Aut(\mathbb{Z}_p)| = p-1$ δηλ. οι δυνατές επιλογές που έχουμε να απεικονίσουμε έναν γεννήτορα σε έναν άλλο στο σύνολο $\mathbb{Z}_p$, διαφορετικό του απεικονιζόμενου, είναι $p-1$.

<u>Παράδειγμα 2.</u>

Έστω $\Sigma_3 = \{e, f, f^2, g, fg, f^2g\}$ με $H = \langle f \rangle \leq \Sigma_3$

$H \cong \mathbb{Z}_3$ αφού $|H| = |\mathbb{Z}_3| = 3$ με $o(f) = o(f^2) = 3$

και $o(\bar{1}) = o(\bar{2}) = 3$.

Έτσι, $|Aut(H)| = |Aut(\mathbb{Z}_3)| = 3-1 = 2$

όπου $\varphi : H \to H$ (τότε είναι το ίδιο με την $\varphi : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$) αυτή απεικονίζει το $e \mapsto e$

αφού είναι ομομορφισμός και $f \mapsto f$ ή $f \mapsto f^2$
$(f^2 \mapsto f^2)$ ή $(f^2 \mapsto f)$.

Άρα, $Aut(H) \cong \mathbb{Z}_2$.

ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΟΥΣΑ (NORMALIZER).

- Η κανονικοποιούσα της $H \leq G$

$$N_G(H) = \{a \in G / aHa^{-1} = H\}.$$

- Ισχύει ότι:

$H \triangleleft N_G(H) \leq G$.

- $H \leq G$. Ο αριθμός των συζυγών υποομάδων aHa^{-1} της H δίνεται από το δείκτη $[G : N_G(H)]$.

Παράδειγμα 1ο:

Έστω $G = \Sigma_3 = \{e, f, f^2, g, fg, f^2g\}$ και $H = \langle f \rangle \leq \Sigma_3$.

Ως γνωστό $H \triangleleft \Sigma_3$ ①

$N_G(H) = \{a \in \Sigma_3 / aHa^{-1} = H\} = \{a \in \Sigma_3 / aH = Ha\}$

Όμως ισχύει η ①.

Άρα, $N_G(H) = H = \{e, f, f^2\}$.

Εάν τώρα πάρουμε την $F = \langle g \rangle \leq \Sigma_3$, αφού $F \ntriangleleft \Sigma_3$, τότε:

$N_G(F) = \{a \in \Sigma_3 / aFa^{-1} = F\} = \{a \in \Sigma_3 / aF = Fa\}$. ②

Αφού, $F \trianglelefteq N_G(F) \Rightarrow |F| = 2 / |N_G(F)| \Rightarrow$

$\Rightarrow |N_G(F)| =$ πολ. 2. Όμως, $|N_G(F)| / |\Sigma_3| = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2k / 6 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow |N_G(F)| = 2$

Άρα, στη ② έχουμε:

$N_G(F) = \{e, g\} = F$.

Παράδειγμα 2ο:

$O = D_4 = \{e, f, f^2, f^3, g, fg, f^2g, f^3g\}$. με τη σχέση $gf^{-i}g = f^i$

και έστω οι υποομάδες $K = \langle f \rangle$ και $L = \langle g \rangle$.

$N_O(L) = \{a \in D_4 \mid aLa^{-1} = L\} = \{a \in D_4 \mid aL = La\}$ ①

Το ταυτοτικό ανήκει στην $N_O(L)$. (προφανές).

Επίσης, από τη θεωρία $L \trianglelefteq N_O(L)$

Παρατηρούμε όμως, ότι για το στοιχείο f^2, ισχύει:

$f^2g = gf^2$. Άρα, η $N_O(L) \supseteq \{e, g, f^2\}$.

Η πράξη όμως πρέπει να είναι κλειστή.

Άρα, $N_O(L) \supseteq \{e, g, f^2, f^2g\} \lneq D_4$.

Υπάρχουν άλλα στοιχεία στην κανονικοποιούσα της L

Προφανώς όχι. Αλλά, σε περίπτωση που είχαμε D_n

για n μεγάλο δεν μπορούμε να εξετάσουμε ένα-ένα

τα στοιχεία. Ας πούμε για την D_4

Άτοπο.

$|N_O(L)| \,/\, |D_4| = 8 \Rightarrow |N_O(L)| = 2$ ή 4 ή 8. ①

Όμως $L \ntrianglelefteq D_4$ ($\Rightarrow L$ όχι αβελιανή $\Rightarrow L$ όχι κυκλική)

και $N_O(L) \lneq D_4 \Rightarrow |N_O(L)| = 4$

Άρα, $N_O(L) = \{e, f^2, g, f^2g\}$

Για να βρούμε τώρα τον αριθμό των υποομάδων

συζυγίας με την L με στοιχεία της $K \Rightarrow$

$$\Rightarrow [\underset{\langle f \rangle}{\underset{\shortparallel}{K}} : \underset{\langle f^2 \rangle}{\underset{\shortparallel}{K \cap N_O(L)}}] = \frac{4}{2} = 2$$ συζυγείς με την L με στοιχεία της K.

Αυτές είναι $\langle g \rangle = e\langle g \rangle e = f^2 \langle g \rangle f^2$ και

$\langle f^2 g \rangle = f \langle g \rangle f^{-1} = f^3 \langle g \rangle f^{-3}$